EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO Y APLICACIONES

SEGUNDA PARTE

Alberto E. J. Manacorda*

**Ingeniero Geografo*
Profesor Titular de Analisis Matematico II
Facultad de Ciencias Economicas y Estadistica
Universidad Nacional de Rosario

MANACORDA ALBERTO

5.- Aplicaciones

5.1.- Teorema de existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial de primer orden.

Sea $f(x,y)$ una función acotada y continua en un dominio D del plano $(0;x,y)$ que satisface la condición de Lipschitz respecto de "y" en D:

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right| \le h\left|y_1-y_2\right|$$

Indiquemos con (x_0,y_0) un punto arbitrario de D. Entonces existe un entorno $N(x_0)$ y una única función $y=\varphi(x)$ tal que:

a) $\varphi(x)$ está definida en $N(x_0)$ y $\forall x \in N(x_0)$ es $(x,\varphi(x)) \in D$.

b) $y_0=\varphi(x_0)$.

c) $\varphi(x)$ es solución única de la ecuación $y'=f(x,y)$ en $N(x_0)$, verificándose la identidad $\varphi'(x) \equiv f\left[x,\varphi(x)\right] \quad \forall x \in N(x_0)$.

Demostración: la ecuación $y'=f(x,y)$ junto con la condición inicial $y_0=\varphi(x_0)$ es equivalente a la ecuación integral

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left[t,y(t)\right]dt \tag{1}$$

Por ser f acotada en D, es $\left|f(x,y)\right| \le M \quad \forall (x,y) \in D$. Escojamos ahora un número $\delta > 0$ de manera que se cumplan las condiciones :

- $\left|x-x_0\right| \le \delta$, $\left|y-y_0\right| \le M\delta$ contenido en D,
- $h\delta < 1$.

Designemos mediante C el espacio de funciones continuas φ definidas sobre el segmento $\left|x-x_0\right| \le \delta$ y tales que $\left|\varphi(x)-y_0\right| \le M\delta$, con la métrica $d(\varphi_1,\varphi_2)=\left\|\varphi_1-\varphi_2\right\|$.

El espacio C es completo sobre $\left[x_0-\delta,x_0+\delta\right]$.

Consideremos el operador T definido por la expresión:

$$T(\varphi)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left[t,\varphi(t)\right]dt$$

donde $\left|x-x_0\right| \le \delta$.

Este operador transforma el espacio completo C en si mismo y es una contracción en él. En efecto, sea $\varphi \in C$ y $|x - x_0| \le \delta$.

En este caso

$$\left|T(\varphi)(x) - y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f\left[t, \varphi(t)\right] dt\right| \le M\delta$$

Entonces $T : C \to C$.

Además $$\left|T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x)\right| \le \int_{x_0}^{x} \left|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\right| dt \le$$

$$\le h\delta \max_x \left|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\right| = h\delta \left\|\varphi_1 - \varphi_2\right\|$$

Puesto que $h\delta < 1$, T es un operador de contracción.

Por tanto, existe φ único tal que $\varphi(x) = T(\varphi) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[t, \varphi(t)\right] dt$.

5.2.- Un teorema de existencia de la función implícita.

Sea f una función definida en una banda B:

$$B = \left\{(x, y) / a \le x \le b; -\infty < y < +\infty\right\}$$

Admitamos que existe la derivada parcial con respecto a "y" que satisface la desigualdad

$$0 < m \le f_y(x, y) \le M \qquad \forall (x, y) \in B \tag{1}$$

donde m y M son constantes tales que $m \le M$. Supongamos además que para cada función φ continua en $[a, b]$ la función compuesta $g(x) = f\left[x, \varphi(x)\right]$ es continua en $[a, b]$.

Entonces existe una y sólo una función $y = y(x)$ continua en $[a, b]$ tal que:

$$f\left[x, y(x)\right] \equiv 0 \qquad \forall x \text{ en } [a, b] \tag{2}$$

Demostración: Designemos con C el espacio lineal de las funciones continuas en $[a, b]$ y definamos un operador $T : C \to C$ mediante la expresión:

$$T(\varphi)(x) = \varphi(x) - \frac{1}{M} f\left[x, \varphi(x)\right]$$

para cada x de $[a, b]$. $T(\varphi) \in C$ siempre que $\varphi \in C$.

Vamos a demostrar que T es una contracción y luego deduciremos que T tiene un único punto fijo "y" en C. Para esta función "y" tendremos $y = T(y)$ lo que significa:

$$y(x) = y(x) - \frac{1}{M} f\left[x, y(x)\right] \qquad \forall x \in [a, b]$$

lo que nos proporcionará (2).

Comenzamos escribiendo la diferencia

$$T(\varphi)(x) - T(\psi)(x) = \varphi(x) - \psi(x) - \frac{f\left[x, \varphi(x)\right] - f\left[x, \psi(x)\right]}{M} \tag{3}$$

Por el teorema del valor medio, tenemos:

$$f\left[x, \varphi(x)\right] - f\left[x, \psi(x)\right] = \left[\varphi(x) - \psi(x)\right] f_y\left[x, \eta(x)\right]$$

donde $\eta(x)$ está situada entre $\varphi(x)$ y $\psi(x)$.

Reemplazando en (3), resulta:

$$T(\varphi)(x)-T(\psi)(x)=\left[\varphi(x)-\psi(x)\right]\left(1-\frac{f_y\left[x,\eta(x)\right]}{M}\right) \tag{4}$$

De (1) se obtiene:

$$0<\frac{m}{M}\leq\frac{f_y\left[x,\eta(x)\right]}{M}\leq 1$$

$$-1\leq-\frac{f_y\left[x,\eta(x)\right]}{M}\leq-\frac{m}{M}<0$$

$$0\leq 1-\frac{f_y\left[x,\eta(x)\right]}{M}\leq 1-\frac{m}{M}<1$$

En consecuencia (4) proporciona:

$$\left|T(\varphi)(x)-T(\psi)(x)\right|\leq\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|\left(1-\frac{m}{M}\right)\leq k\left\|\varphi-\psi\right\| \tag{5}$$

donde $k=1-\frac{m}{M}<1$

La desigualdad (5) es válida $\forall x\in\left[a,b\right]$. Luego T es un operador de contracción.

Entonces T tiene un punto fijo único:

$$y=T(y)$$

Así que siendo $y(x)=T(y)=y(x)-\frac{1}{M}f\left[x,y(x)\right]\quad\forall x\in\left[a,b\right]$

resulta $f\left[x,y(x)\right]\equiv 0$.

5.3.- Teorema de existencia para ecuaciones integrales.

Sea la ecuación integral lineal no homogénea de Fredholm de segunda especie:

$$f(x)=\varphi(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy \tag{1}$$

donde K (llamada núcleo) y φ son funciones dadas, f la función incógnita y λ un parámetro arbitrario. Mostraremos que el método es aplicable para valores suficientemente pequeños del parámetro λ.

Supongamos que $K(x,y)$ y $\varphi(x)$ son continuas en $a\leq x\leq b$, $a\leq y\leq b$; por consiguiente $\left|K(x,y)\right|\leq M>0$.

Consideremos el operador T del espacio completo $C_{[a,b]}$ en sí mismo, definido por:

$$T(f)(x)=\varphi(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy$$

Llamamos solución de (1) a la función $f(x)$ que, al ser sustituida en dicha ecuación, la transforma en una identidad (respecto a x).

La demostración se basa en probar que T es un operador de contracción. Para esto tomemos en C dos funciones cualesquiera f_1 y f_2 y hagamos la diferencia.

$$\left|T(f_1)(x)-T(f_2)(x)\right|\leq|\lambda|M\int_a^b\left|f_1(y)-f_2(y)\right|dy\leq|\lambda|M\left\|f_1-f_2\right\|\int_a^b dy=$$

$$= |\lambda| M(b-a) \| f_1 - f_2 \| = k \| f_1 - f_2 \|$$

siendo $k = |\lambda| M(b-a)$. Por tanto, T es una contracción si $0 < k < 1$, o sea cuando

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \qquad (2)$$

Luego $\forall \lambda$ que verifique (2), la ecuación de Fredholm tiene una solución continua única en $C_{[a,b]}$.

Las aproximaciones sucesivas $f_0, f_1, ..., f_n ...$ de esta solución tienen la forma:

$$f_n(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) f_{n-1}(y)\, dy$$

6.- Generalización

Presentamos ahora una generalización para operadores de contracción.

6.1.- Teorema: Sea A una aplicación continua del espacio métrico completo E en sí mismo tal que la aplicación $A^n = T$ es una contracción para algún n; en este caso la ecuación:

$$A(x) = x$$

tiene una solución y sólo una.

En efecto, tomemos un punto arbitrario $x_0 \in E$ y consideremos la sucesión: $x_0, x_1 = A^n(x_0) = T(x_0), x_2 = A^n(x_1) = T(x_1) = A^{2n}(x_0) = T^2(x_0), ...$ es decir $x_p = A^{pn}(x_0) = T^p(x_0) \quad (p = 0,1,2,3,...)$.

Repitiendo la parte correspondiente de la demostración del teorema 4.2., podemos probar que esta sucesión converge.

Pongamos: $\quad x = \lim_{p\to\infty} A^{pn}(x_0) = \lim_{p\to\infty} T^p(x_0) \qquad (1)$

y queremos probar que $A(x) = x$.

En efecto, debido a la continuidad de A, tenemos

$$A(x) = A\left(\lim_{p\to\infty} T^p(x_0)\right) = \lim_{p\to\infty} T^p\left(A(x_0)\right) \qquad (2)$$

Puesto que $A^n = T$ es un operador de contracción

$d\left[A^{pn}(A(x_0)), A^{pn}(x_0)\right] = d\left[T^p(A(x_0)), T^p(x_0)\right] \le kd\left[T^{p-1}(A(x_0)), T^{p-1}(x_0)\right] \le$

$\le ... \le k^p d\left[A(x_0), x_0\right]$. Entonces:

$\lim_{p\to\infty} d\left[A^{pn}(A(x_0)), A^{pn}(x_0)\right] = \lim_{p\to\infty} d\left[T^p(A(x_0)), T^p(x_0)\right] \le \lim_{p\to\infty} k^p d\left[(A(x_0)), x_0\right] = 0$

pues $k^p \to 0$ cuando $p \to \infty$, ya que $k < 1$. Entonces, por la continuidad de la distancia d, de (1) y (2), se tiene: $d\left[A(x), x\right] = 0 \quad \therefore A(x) = x$.

La unicidad surge de que, como todo punto fijo respecto a A, también será fijo respecto al operador $A^n = T$ que es de contracción, este punto fijo es único.

6.2.- Teorema de existencia para la ecuación integral de Volterra de segunda especie.

Esta ecuación es de la forma:

$$f(x)=\varphi(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)f(t)\,dt$$

que se diferencia de la ecuación de Fredholm por tener en el extremo superior de la integral la variable x.

Aplicaremos en este caso el teorema 6.1. Probaremos que cierta potencia del operador

$$A(f)(x)=\varphi(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)f(t)\,dt$$

es una contracción. Sean f_1 y f_2 dos funciones continuas sobre $[a,b]$. Entonces:

$$\left|A(f_1)(x)-A(f_2)(x)\right|=\left|\lambda\int_a^x K(x,t)\left[f_1(t)-f_2(t)\right]dt\right|\le|\lambda|M(x-a)\|f_1-f_2\|.$$

Aquí hemos llamado con $M=\max\left|K(x,t)\right|$.

De la desigualdad anterior (ver apéndice 7.5.), se tiene:

$$\left|A^2(f_1)(x)-A^2(f_2)(x)\right|\le|\lambda|^2M^2\frac{(x-a)^2}{2}\|f_1-f_2\|$$

y en general

$$\left|A^n(f_1)(x)-A^n(f_2)(x)\right|\le|\lambda|^nM^n\frac{(x-a)^n}{n!}\|f_1-f_2\|\le|\lambda|^nM^n\frac{(b-a)^n}{n!}\|f_1-f_2\|$$

Entonces, cualquiera que sea el valor de λ, podemos escoger n tan grande de modo que

$$|\lambda|^nM^n\frac{(b-a)^n}{n!}<1$$

es decir, el operador A^n es de contracción para n suficientemente grande. Por consiguiente la ecuación de Volterra de segunda especie, tiene solución única, cualquiera que sea λ.

7.- Apéndice

7.1.- Relación entre las ecuaciones diferenciales lineales y las ecuaciones integrales de Volterra.

La resolución de la ecuación diferencial lineal

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=b(x)$$

con coeficientes continuos $a_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ y condiciones iniciales:

$$y(0)=C_0,\ y'(0)=C_1,\ldots,y^{(n-1)}(0)=C_{n-1}$$

puede ser reducida a la solución de cierta ecuación integral de Volterra de segunda especie.

Demostraremos esto para la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=b(x) \qquad (1)$$

$$y(0)=C_0 \quad , \quad y'(0)=C_1$$

Hagamos

$$y''=\varphi(x) \qquad (2)$$

Por tanto $\int_0^x\varphi(t)\,dt=y'(x)-y'(0)=y'(x)-C_1$

$$\therefore \quad y'(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt + C_1 \tag{3}$$

Análogamente

$$y(x) = \int_0^x \left[\int_0^t \varphi(z)\,dz + C_1 \right] dt + C_0$$

$$\int_0^x \left[\int_0^t \varphi(z)\,dz + C_1 \right] dt = \int_0^x \left[\int_0^t \varphi(z)\,dz \right] dt + C_1 x \tag{4}$$

Vamos a integrar por partes.

Llamemos: $u = \int_0^t \varphi(z)dz$ y $dv = dt$ $\therefore$ $v = t - x$

Considerando $-x$ como una constante aditiva.

Así resulta: $\int_0^x \left[\int_0^t \varphi(z)\,dz \right] dt = (t-x)\int_0^t \varphi(z)\,dz \Big|_0^x - \int_0^x (t-x)\varphi(t)\,dt$

Reemplazando en (4) $\int_0^x \left[\int_0^t \varphi(z)\,dz \right] dt + C_1 x = \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt + C_1 x$

En consecuencia:

$$y(x) = \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt + C_1 x + C_0 \tag{5}$$

Reemplazando (2), (3) y (5) en (1), nos queda:

$$\varphi(x) + a_1(x)\int_0^x \varphi(t)\,dt + a_1(x)C_1 + a_2(x)\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt + a_2(x)C_1 x + a_2(x)C_0 = b(x)$$

$$\varphi(x) + \int_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-t) \right]\varphi(t)\,dt = b(x) - C_1\left[a_1(x) + x a_2(x) \right] - C_0 a_2(x)$$

Llamando:

$$K(x,t) = -\left[a_1(x) + a_2(x)(x-t) \right] \tag{6}$$

$$f(x) = bx - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x)$$

nos queda:

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt + f(x) \tag{7}$$

que es una ecuación de segunda especie de Volterra.

La existencia de la solución única de (7) se desprende del teorema demostrado en 6.2., ya que $K(x,t)$ y $f(x)$ son funciones continuas. Resolviendo la ecuación (7) con K y f dados por (6) y sustituyendo la expresión obtenida para $\varphi(x)$ en (5), se tiene la solución única de la ecuación (1) que satisface las condiciones iniciales dadas. Cabe también acotar, que la existencia y unicidad de (7) se desprende de la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy para la ecuación diferencial lineal con coeficientes continuos en un entorno de $x = 0$.

7.2.- Continuidad de la distancia.

MANACORDA ALBERTO

Teorema: La función numérica $(x,y)\to d(x,y)$ definida sobre $E\times E$ es continua sobre $E\times E$.

Basta demostrar que en el espacio métrico (E,d), si (x_n,y_n) tiende a (x_0,y_0).según la distancia definida sobre $E\times E$, entonces $d(x_n,y_n)$.tiende a $d(x_0,y_0)$.

De la desigualdad triangular, cualesquiera que sean:

$$x, z_1, z_2, ..., z_{n-1}, z_n, y \in E$$

$$d(x,y)\le d(x,z_1)+d(z_1,z_2)+...+d(z_n,y)$$

Por lo tanto, para $x, y, x', y',$ será:

$$d(x,y)\le d(x,x')+d(x',y')+d(y',y)$$

$$d(x',y')\le d(x',x)+d(x,y)+d(y,y')$$

y como: $d(x,x')=d(x',x)$ y $d(y,y')=d(y',y)$

se tienen:

$$d(x,y)-d(x',y')\le d(x,x')+d(y,y')$$

$$d(x',y')-d(x,y)\le d(x,x')+d(y,y')$$

Luego:

$$\left|d(x,y)-d(x',y')\right|\le d(x,x')+d(y,y') \qquad (1)$$

Entonces, llamando $x=x_n$, $y=y_n$, $x'=x_0$, $y'=y_0$, y reemplazando en la desigualdad anterior (1) nos queda la expresión:

$$\left|d(x_n,y_n)-d(x_0,y_0)\right|\le d(x_n,x_0)+d(y_n,y_0)$$

que completa la demostración.

7.3.- Nota: Cabe destacar que la desigualdad (1) prueba que la distancia d es uniformemente continua sobre $E\times E$ (E lineal).

7.4.- En un espacio métrico se usan en numerosas cuestiones sucesiones convergentes. Por tal motivo, hacemos notar que para que una sucesión $\{x_n\}$ converja a un punto $x\in E$, es necesario y suficiente que $d(x,x_n)$ tienda a cero. Pues si x_n converge hacia x, toda bola abierta con centro x y radio ε contiene todos los x_n, salvo los que corresponden a un número finito de índices, por tanto, sea cual sea $\varepsilon>0$, se verifica $d(x,x_n)<\varepsilon$ salvo para un número finito de valores de n.

Inversamente, si $d(x,x_n)\to 0$, para cualquier $\varepsilon>0$, la bola abierta de centro x y radio ε contiene todos los x_n tales que $d(x,x_n)<\varepsilon$ y por tanto, los contiene todos, salvo un número finito.

7.5.- Trataremos en este punto, con más detalle la demostración del teorema 6.2.

Habíamos probado que:

$$\left|A(f_1)(x)-A(f_2)(x)\right|\le|\lambda|M(x-a)\|f_1-f_2\|$$

Entonces, siendo

$$A^2(f)(x) = A(A(f))(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) A(f)(t)\, dt$$

$$A^2(f_1)(x) - A^2(f_2)(x) = \lambda \int_a^x K(x,t) \left[A(f_1)(t) - A(f_2)(t) \right] dt$$

Por tanto:

$$\left| A^2(f_1)(x) - A^2(f_2)(x) \right| \leq |\lambda| \int_a^x |K(x,t)| \left| A(f_1)(t) - A(f_2)(t) \right| dt \leq$$

$$\leq \left| \lambda^2 \right| M^2 \| f_1 - f_2 \| \int_a^x (t-a)\, dt$$

y como:

$$\int_a^x (t-a)\, dt = \left. \frac{(t-a)^2}{2} \right|_a^x = \frac{(x-a)^2}{2}$$

Luego:

$$\left| A^2(f_1)(x) - A^2(f_2)(x) \right| \leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2} \| f_1 - f_2 \|$$

y en general, por inducción:

$$\left| A^n(f_1)(x) - A^n(f_2)(x) \right| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \| f_1 - f_2 \|$$

pues $x \in [a,b]$.

BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL, Tom. “Análisis Matemático”. Ed. Rverté S.A. Barcelona. 1982.

APOSTOL, Tom. “Calculus”. Ed. Reverté S.A. Barcelona. 1992.

DIEUDONNÉ, J. ”Fundamentos de análisis moderno”. Ed. Reverté S.A. Barcelona.1966.

KOLMOGOROV, A.N. y FOMIN, S.V. “Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional”. Editorial MIR. Moscú. 1975.

PISOT, C y ZAMANSKY, M. “Matemáticas Generales”. Montaner y Simon S.A. Barcelona. 1966.

TARZIA, Domingo A. “Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre. Argentina”. CONICET. Buenos Aires. 1981.

ZAMANSKY, Marc. “Introducción al álgebra y análisis moderno”. Montaner y Simon S.A. Barcelona. 1970.